# Einleitung

Dieser Text soll versuchen, die Frage nach einer exakten Berechnung der Verluste einer fehlangepaßten HF-Leitung bei gegebenen Parametern zu beantworten. In den Lehrbüchern wird dieses Thema meist nur sehr knapp behandelt. Bei größerer Leitungslänge reicht es aus, nur mit dem Betrag des Reflexionsfaktors zu rechnen; daraus ergibt sich das beispielsweise von W2DU (Reflections) oder aus dem ARRL-Handbuch bekannte Diagramm „additional loss caused by standig waves“, das bei Leitungslängen $< \lambda/4$ schon merkliche Abweichungen zeigt.

Das hier gewählte Rechenverfahren geht von der Theorie einer eingeschwungenen Leitung aus, deren Spannungs- und Stromverteilung durch Überlagerung gedämpfter hinlaufender und reflektierter Spannungs- und Stromwellen beschrieben wird.

## 1.1 Definitionen

Wir betrachten eine Leitung der Länge $l$ und der Ausbreitungskonstante $\gamma = (\alpha + i\beta)$. $x$ soll die Längenkoordinate bezeichnen, $x = 0$ entspricht dem Leitungsanfang (Generatorende). Größen mit Index $_1$ beziehen sich auf den Anfang, solche mit $_2$ auf das Ende der Leitung, mit $_h$ und $_r$ werden „‘hin- und rücklaufende“ Spannungen oder Ströme bezeichnet. $Z_0$ ist der komplexe Wellenwiderstand der Leitung:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad \text{und} \quad \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{1}$$

R,L,G,C sind hier wie üblich die Leitungsbeläge je Längeneinheit.

## 1.2 Spannungs- und Stromverteilung

Wir schreiben die Spannung

$$U(x) = U_h e^{-\gamma x} + U_r e^{\gamma x} \tag{2}$$

und den Strom

$$I(x) = I_h e^{-\gamma x} - I_r e^{\gamma x} \tag{3}$$

als Überlagerung einer hinlaufenden und einer reflektierten Welle. In (2) können wir noch ausnutzen, daß die Teilströme und -spannungen über den Wellenwiderstand verknüpft sind:

$$I(x) = \frac{U_h}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_r}{Z_0} e^{\gamma x} \tag{4}$$

Das Ziel ist jetzt, $U_h$ und $U_r$ durch meßbare Größen auszudrücken. Die Spannungen und Ströme an den Leitungsenden sind:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_h + U_r \\ I_1 &= \frac{U_h}{Z_0} - \frac{U_r}{Z_0} \\ U_2 &= U_h e^{-\gamma l} + U_r e^{-\gamma l} \\ I_2 &= \frac{U_h}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U_r}{Z_0} e^{\gamma l} \end{aligned} \tag{5}$$

Durch Umformen der unteren beiden Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{\gamma l} \\ U_r &= \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-\gamma l} \end{aligned} \tag{6}$$

Anschließend oben eingesetzt:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{\gamma l} + \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-\gamma l} \\ I_1 &= \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2 Z_0} e^{\gamma l} - \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2 Z_0} e^{-\gamma l} \end{aligned} \tag{7}$$

Umsortieren:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U_2}{2}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) + \frac{Z_0 I_2}{2}(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) \\ I_1 &= \frac{U_2}{2 Z_0}(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) + \frac{I_2}{2}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) \end{aligned} \tag{8}$$

, was sich anschließend auch als

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cosh \gamma l + Z_0 I_2 \sinh \gamma l \\ I_1 &= \frac{U_2}{Z_0} \sinh \gamma l + I_2 \cosh \gamma l \end{aligned} \tag{9}$$

schreiben läßt.

## 1.3 Impedanztransformation

Division der beiden letzten Gleichungen liefert die Eingangsimpedanz der Leitung:

$$\begin{aligned} Z_1 = \frac{U_1}{I_1} &= \frac{U_2 \cosh \gamma l + Z_0 \frac{U_2}{Z_2} \sinh \gamma l}{\frac{U_2}{Z_0} \sinh \gamma l + \frac{U_2}{Z_2} \cosh \gamma l} \\ &= \frac{\cosh \gamma l + Z_0/Z_2 \sinh \gamma l}{1/Z_0 \sinh \gamma l + 1/Z_2 \cosh \gamma l} \end{aligned} \tag{10}$$

Multiplikation mit

$$\frac{Z_0 Z_2}{\cosh \gamma l}$$

führt nach wenigen Umstellungen auf die aus den Lehrbüchern bekannten Formeln

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_2 \tanh \gamma l} \\ &\text{bzw.} \\ Z_2 &= Z_0 \frac{Z_1 - Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 - Z_1 \tanh \gamma l} \end{aligned} \tag{11}$$

mit der die ans Generator- bzw. Lastende transformierte Impedanz berechnet werden kann.

## 1.4 Die Berechnung des Wirkungsgrads

Bis hierher ist noch nichts neues passiert. Die an den Anfang der Leitung transformierte Eingangsimpedanz brauchen wir, um die vom Generator abgelieferte Leistung zu bestimmen. Zur Berechnung der Leitungsverluste fehlt uns aber noch die zugehörige Spannung am Verbraucherende. Dazu sehen wir uns (9) noch einmal an: Wir brauchen diese Gleichung in einer Form, die $U_2$ als Funktion von $U_1$ darstellt.

Dazu kann man (9) wieder ein paarmal umformen und bekommt

$$U_2 = \frac{U_1}{\cosh \gamma l + Z_0/Z_2 \sinh \gamma l} \tag{12}$$

falls $Z_2$ bekannt, oder, falls die Impedanz $Z_1$ am Generatorende bestimmt werden kann

$$U_2 = U_1 (\cosh \gamma l - Z_0/Z_1 \sinh \gamma l) \tag{13}$$

Jetzt fehlt noch eine kleine Überlegung, um den Wirkungsgrad zu bestimmen. $Z_1$ und $Z_2$ sind im allgemeinen komplex; um die Wirkleistung zu errechnen, müssen $Z_1$ und $Z_2$ zunächst in die äquivalenten Admittanzen umgewandelt werden. Die im Realteil von $Z_1$ und $Z_2$ jeweils umgesetzte Wirkleistung sowie der Leitungswirkungsgrad ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned} P_1 &= |U_1|^2\, \Re(\frac{1}{Z_1}) \\ P_2 &= |U_2|^2\, \Re(\frac{1}{Z_2}) \\ \eta &= \frac{P_2}{P_1} \end{aligned} \tag{14}$$

Grundsätzlich könnte jetzt also mit der Festlegung $U_1 := 1$ und Einsetzen der einzelnen Ausdrücke eine geschlossene Wirkungsgradformel

$$\eta = \eta(Z_0, \gamma, Z_2)$$

hingeschrieben werden, wegen der besseren Übersichtlichkeit belassen wir es hier beim „Kochrezept“:

1. Einsetzen der (frequenzabhängigen!) Leitungskenngrößen in (1) $\rightarrow Z_0, \gamma$
2. Bestimmung der transformierten Impedanz nach (11)
3. Errechnen der Spannung am Leitungsende nach (12) oder (13)
4. Bestimmung der zugehörigen Wirkleistungen nach (14)
5. Bei reiner Wirkungsgradberechnung wird $U_1 = 1$ gesetzt
6. Soll die Differenz der Verluste zwischen „angepaßter Leitung“ und „Leitung mit Fehlabschluß“ bestimmt werden, muß die Rechnung noch einmal für den Fall $Z_2 = Z_0$ wiederholt werden, wobei natürlich für $Z_2$ wieder der zuvor ermittelte komplexe Wellenwiderstand (1) in (11) einzusetzen ist.

# Schluß

Man sieht, daß die exakte Ermittlung der Leitungsverluste zwar möglich, aber einer manuellen Rechnung kaum zugänglich ist. Als Anwendung für Spreadsheet-Programme läßt sie sich aber ohne großen Aufwand realisieren, da hier schon eine Basismenge von Funktionen für komplexe Arithmetik zur Verfügung steht. Für den in der Literatur häufig vorausgesetzten vereinfachten Fall einer sog. „verzerrungsfreien“ Leitung müssen die Werte für (1) die Bedingung

$$\frac{R}{G} = \frac{L}{C}$$

erfüllen.